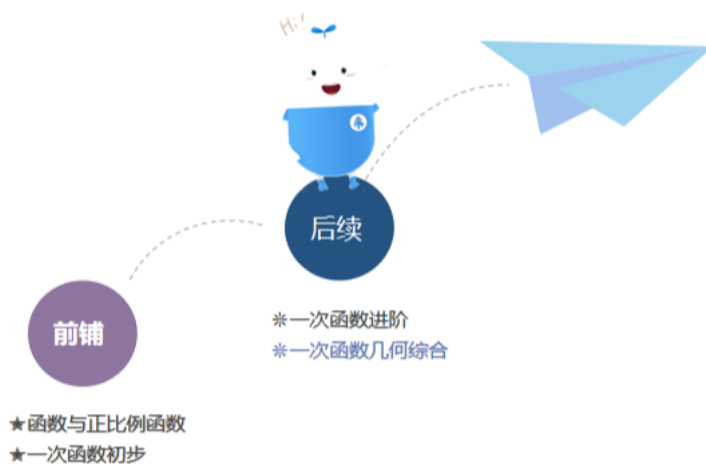
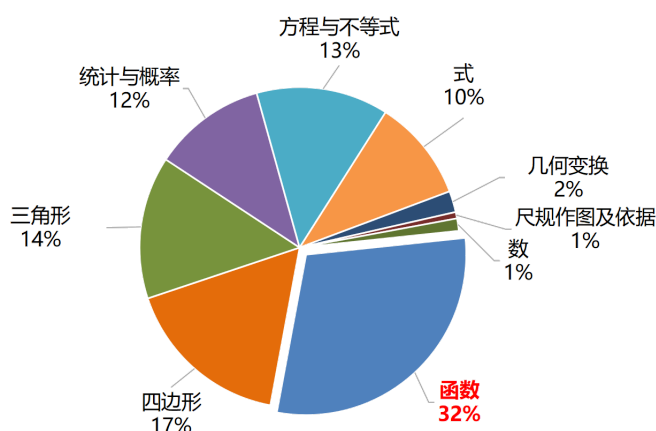


# 第1讲 一次函数公共点问题

一次函数属于人教版第十九章的内容，是期末考试的必考知识点，同时也是中考第16题考点：一次函数的性质；23题的考点：一次函数实际应用，故这部分我们分为《一次函数初步》、《一次函数进阶》、《一次函数几何综合》三个模块。本模块为《一次函数几何综合》，旨在帮助学生掌握并熟练运用一次函数的图象与性质解决综合性问题。

本模块难度较大，适用于一次函数的难点突破，本模块分为一次函数与轴对称综合、一次函数与面积综合、一次函数与四边形综合3讲内容，帮助学生熟悉一次函数几何综合部分常见题型，理清解题思路。



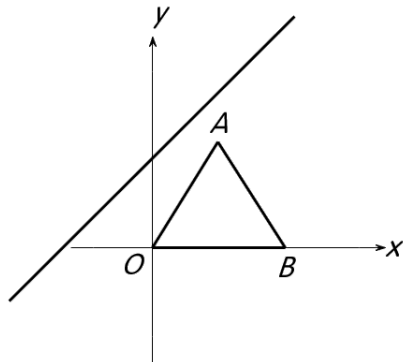
# 一、一次函数平移与图形的公共点

## 思考

如图， $l$  为斜率为1的任意一条直线， $l$  与  $\triangle AOB$  可能有几个交点？

解题思路：

- ① 先找只有 一个 交点的临界点；
- ② 直线在两个临界点 之间 时，有 两个 交点；
- ③ 直线在两个临界点 两边 时，没有 交点。



### 【教法备注】

解析：

- ① 上图当  $l$  分别经过  $A$ 、 $B$  时，是两个临界点，此时与  $\triangle AOB$  有一个交点；
- ② 当  $l$  在临界点之间时，与  $\triangle AOB$  有两个交点；
- ③ 当  $l$  在临界点两边时，与  $\triangle AOB$  没有交点

取值范围问题一般三个步骤，仔细阅读题意之后

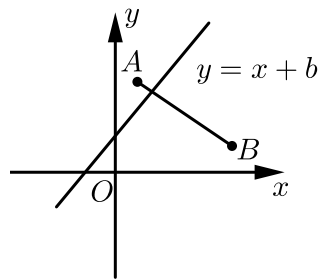
- (1) 画出临界情况：比如要求直线和正方形有两个公共点；
- (2) 计算临界值：通过直线过特殊点，计算出临界值；
- (3) 验证所计算的临界值是否取等号：如临界值满足题意就可以取等，不满足则不能等号。

当一次函数的  $k$  一定，是一系列上下平移的直线，通过平移确定交点的个数，以此来确定临界值。

## 例题1

1. 在平面直角坐标系中， $O$  是原点，已知点  $A(1, 3)$ 、 $B(4, 1)$ 。直线  $l$  是一次函数  $y = x + b$  的图象。

- ① 当  $b = 3$  时，求直线  $l$  与  $x$  轴的交点坐标；
- ② 当直线  $l$  与线段  $AB$  有交点时，直接写出  $b$  的取值范围。



**【答案】** ① $(-3, 0)$  . ② $-3 \leq b \leq 2$  .

**【解析】** ① $b = 3$ 时直线 $l: y = x + 3$  .

令 $y = 0$ 得 $x = -3$

$\therefore$ 直线 $l$ 与 $x$ 轴交点是 $(-3, 0)$  .

②直线 $l$ 经过点 $A(1, 3)$ 时,  $1 + b = 3$ , 解得 $b = 2$  ,

直线 $l$ 经过点 $B(4, 1)$ 时,  $4 + b = 1$ , 解得 $b = -3$  ,

$\therefore$ 由图象可得当直线 $l$ 与线段 $AB$ 有交点时,  $-3 \leq b \leq 2$  .

**【标注】**【知识点】一次函数与一元一次不等式

### 练习1

2. 已知直线 $y = 2x + 2$ 与 $x$ 轴、 $y$ 轴分别交于点 $A$  ,  $B$  . 若将直线 $y = \frac{1}{2}x$ 向上平移 $n$ 个单位长度与线段 $AB$ 有公共点, 则 $n$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $\frac{1}{2} \leq n \leq 2$

**【解析】**  $\therefore$ 直线 $y = 2x + 2$ 与 $x$ 轴、 $y$ 轴分别交于点 $A$  ,  $B$  ,

$\therefore A(-1, 0)$  ,  $B(0, 2)$  ,

将直线 $y = \frac{1}{2}x$ 向上平移 $n$ 个单位长度后得到: 直线 $y = \frac{1}{2}x + n$  ,

当直线 $y = \frac{1}{2}x + n$ 经过点 $A$ 时,  $0 = -\frac{1}{2} + n$ , 即 $n = \frac{1}{2}$  ,

当直线 $y = \frac{1}{2}x + n$ 经过点 $B$ 时,  $2 = 0 + n$ , 即 $n = 2$  ,

又 $\therefore$ 直线 $y = \frac{1}{2}x + n$ 与线段 $AB$ 有公共点 ,

$\therefore n$ 的取值范围是 $\frac{1}{2} \leq n \leq 2$  .

故答案为:  $\frac{1}{2} \leq n \leq 2$  .

**【标注】**【知识点】一次函数平移变换

3. 在平面直角坐标系中,  $A$ 、 $B$ 两点的坐标分别为 $(-1, 2)$ 、 $(2, 2)$  .

( 1 ) 直线 $y = |x| + b$ 与线段 $AB$ 有且只有一个公共点, 则实数 $b$ 取值范围是 \_\_\_\_\_ .

**【答案】** ( 1 )  $0 \leq b < 1$ 或 $b = 2$

**【解析】** ( 1 ) 当 $x > 0$ 时,  $y = x + b$  ,

当 $x < 0$ 时,  $y = -x + b$  ,

①  $y = -x + b$  经过  $A(-1, 2)$  时,  $b = 1$ ,

此时直线  $y = |x| + 1$  与  $y = 2$  另一个交点为  $(1, 2)$ , 在线段  $AB$  上,

$\therefore b < 1$ ;

②  $y = x + b$  经过  $B(2, 2)$  时,  $b = 0$ ,

此时直线  $y = |x|$  与  $y = 2$  另一个交点为  $(-2, 2)$ , 在线段  $AB$  上;

$\therefore b \geq 0$ ;

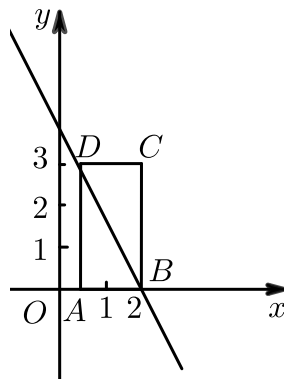
③ 当  $(0, b)$  恰好在线段  $AB$  上时, 此时  $b = 2$ ;

综上  $0 \leq b < 1$  或  $b = 2$ .

**【标注】**【知识点】一次函数与几何图形公共点问题

## || 例题2

4. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 矩形  $ABCD$  的边  $AD = 3$ ,  $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $B(2, 0)$ , 直线  $y = kx + b$  经过  $B, D$  两点.



- (1) 求直线  $y = kx + b$  的解析式.  
(2) 将直线  $y = kx + b$  平移, 若它与矩形有公共点, 直接写出  $b$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $y = -2x + 4$ .

(2)  $1 \leq b \leq 7$ .

**【解析】** (1)  $\because A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $AD = 3$ .  
 $\therefore D\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ .

将  $B, D$  两点坐标代入  $y = kx + b$  中,

$$\text{得} \begin{cases} 2k + b = 0 \\ \frac{1}{2}k + b = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\therefore y = -2x + 4.$$

(2) 把  $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $C(2, 3)$  分别代入  $y = -2x + b$ ,

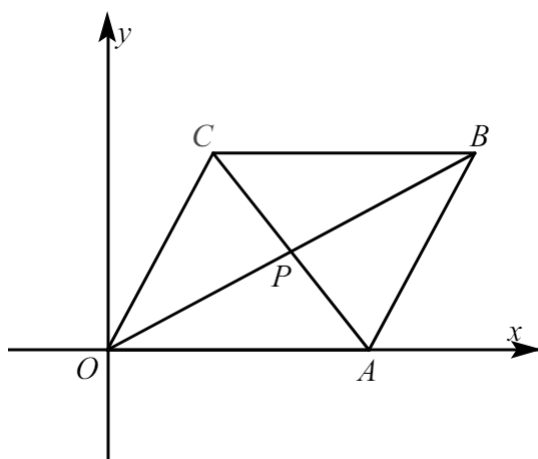
得出  $b = 1$ , 或  $b = 7$ ,

$$\therefore 1 \leq b \leq 7.$$

**【标注】**【知识点】一次函数平移变换

## 练习2

5. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $A(4, 0)$ ,  $OA = OC$ ,  $\angle AOC = 60^\circ$ , 且  $CB \parallel OA$ ,  $OB$  平分  $\angle AOC$ , 点  $P$  是四边形  $OABC$  的对角线交点.



- (1) 若一次函数  $y = x + b$  的图象经过点  $P$ , 求  $b$  的值.  
 (2) 若一次函数  $y = x + m$  的图象与四边形  $OABC$  有两个公共点时, 求  $m$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $b = \sqrt{3} - 3$ .

(2)  $-4 < m < 2\sqrt{3} - 2$ .

**【解析】** (1) 由  $CB \parallel OA$ ,  $OB$  平分  $\angle COA$  证得  $BC = CO = OA$ ,

进而得到菱形  $OCBA$ ,

$\therefore P$  点为  $OB$  中点  $(3, \sqrt{3})$ ,

代入解析式进而求得  $b = \sqrt{3} - 3$ .

(2) 直线与四边形有两个交点时必在  $A$ ,  $C$  点之间,

当  $y = x + m$  经过点  $A$  时,

把  $(4, 0)$  代入得  $4 + m = 0$ ,

解得  $m = -4$ ,

当  $y = x + m$  经过点  $C(2, 2\sqrt{3})$  时,

则  $2 + m = 2\sqrt{3}$ ,

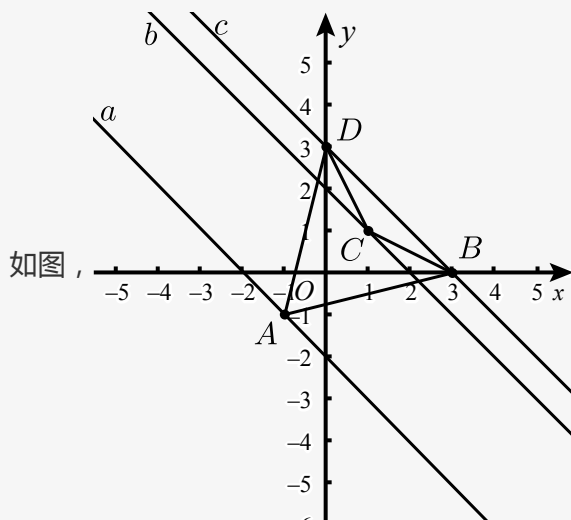
解得  $m = 2\sqrt{3} - 2$  ,  
 则  $-4 < m < 2\sqrt{3} - 2$  .

【标注】【知识点】一次函数的图象特征与性质

6. 给出定义：若直线与一个图形有且只有两个公共点，则直线与该图形位置关系是相交．坐标系  $xOy$  中，以  $A(-1, -1)$  ,  $B(3, 0)$  ,  $C(1, 1)$  ,  $D(0, 3)$  为顶点，顺次连结  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  构成图形  $M$  . 若直线  $y = -x + b$  与  $M$  相交，则  $b$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $-2 < b < 2$  或  $b = 3$

【解析】



当直线在  $a$  ,  $b$  之间时，直线  $y = -x + b$  与  $M$  相交，

此时  $-2 < b < 2$  ;

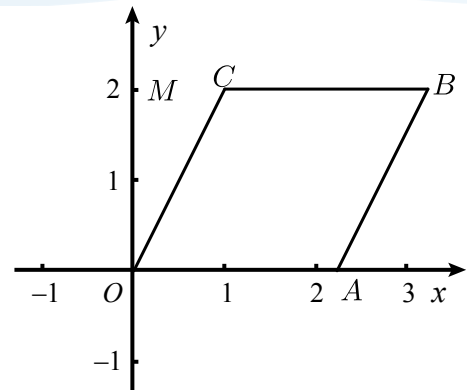
当直线为直线  $c$  时，直线  $y = -x + b$  与  $M$  相交，

此时  $b = 3$  .

综上， $b$  的取值范围是  $-2 < b < 2$  或  $b = 3$  .

【标注】【知识点】一次函数与一元一次不等式

7. 已知菱形  $OABC$  在坐标系中的位置如图所示， $O$  是坐标原点，点  $C(1, 2)$ ，点  $A$  在  $x$  轴上，点  $M(0, 2)$



(1) 点  $P$  是直线  $OB$  上的动点, 求  $PM + PC$  最小值.

(2) 将直线  $y = -x - 1$  向上平移, 得到直线  $y = kx + b$ .

① 当直线  $y = kx + b$  与线段  $OC$  有公共点时, 结合图象, 直接写出  $b$  的取值范围.

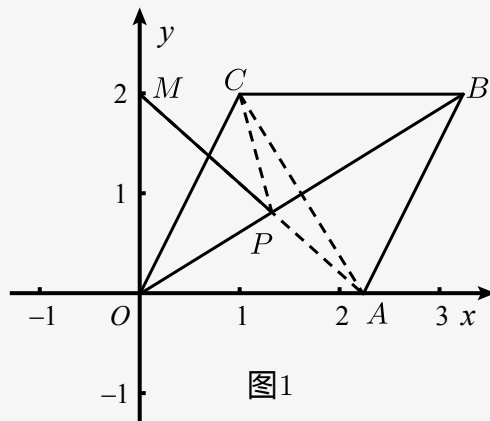
② 当直线  $y = kx + b$  将四边形  $OABC$  分成面积相等的两部分时, 求  $k, b$ .

(只需写出解题的主要思路, 不用写出计算结果).

**【答案】** (1)  $PM + PC$  最小值为 3.

(2) ①  $0 \leq b \leq 3$ , ②  $k = -1, b = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

**【解析】** (1) 由已知,  $OA = OC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ , 连接  $AC, AM$ , 如图1所示.



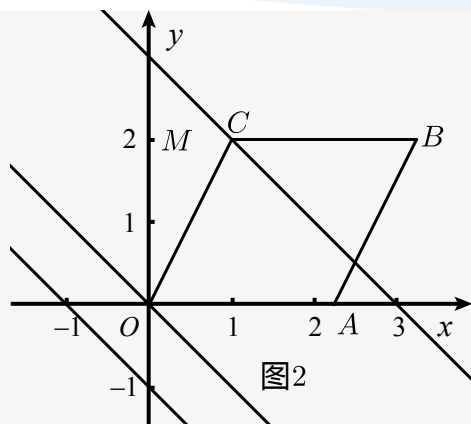
$\because$  四边形  $OABC$  是菱形,

$\therefore PC = PA$ ,

$\therefore PC + PM = PM + PA \leq AM$ ,

即  $PC + PM \leq \sqrt{OM^2 + AO^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$ .

(2) ① 依照题意画出图形, 如图2所示.



结合函数图象可知，当点 $O$ 在直线 $y = -x + b$ 上时， $b$ 最小，此时 $b = 0$ ；

当点 $C$ 在直线 $y = -x + b$ 上时， $b$ 值最大，

$\therefore$ 点 $C(1, 2)$ ，

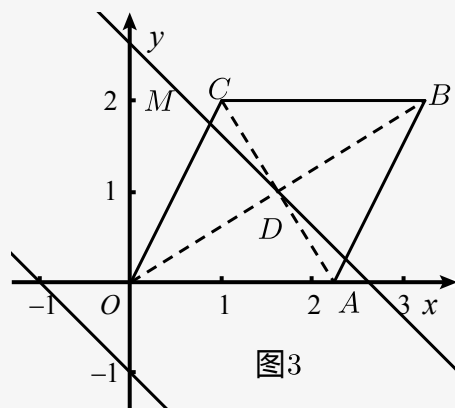
$\therefore 2 = -1 + b$ ，解得： $b = 3$ 。

故 $0 \leq b \leq 3$ 。

②连接 $AC$ 、 $OB$ ，设 $AC$ 与 $OB$ 的交点为 $D$ ，

当直线 $y = -x + b$ 过点 $D$ 时，直线 $y = -x + b$ 将四边形 $OACB$ 分成面积相等的两部分，

如图3所示。



$\therefore OA = OC = \sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 点 $A(\sqrt{5}, 0)$ 。

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 为菱形， $C(1, 2)$ ， $A(\sqrt{5}, 0)$ ，

$\therefore$ 点 $D(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 1)$ 。

$\therefore$ 直线 $y = -x + b$ 过点 $D$ ，

$\therefore 1 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b$ ，解得： $b = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ 。

$\therefore$ 当直线 $y = kx + b$ 将四边形 $OACB$ 分成面积相等的两部分时， $k = -1$ ，

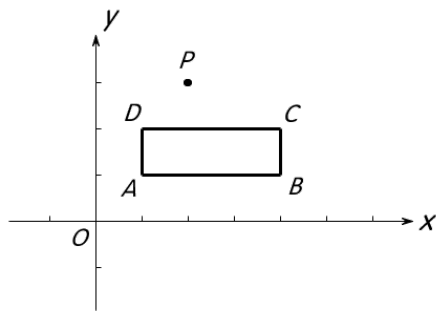
$b = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ 。

**【标注】**【知识点】一次函数与面积

## 二、一次函数旋转与图形的公共点

### 思考2

如图，在矩形 $ABCD$ 中， $A(1,1)$ ， $B(4,1)$ ， $C(4,2)$ ， $D(1,2)$ ，过点 $P(2,3)$ 的直线 $y=kx+b$ 与矩形有两个交点，求 $k$ 的取值范围.



#### 【教法备注】

这部分内容需要涉及到一次函数的性质： $|k|$ 的绝对值越大，图象越靠近 $y$ 轴.

解析：

①上图当 $l$ 分别经过 $A$ 、 $D$ 时，是两个临界点，此时与矩形 $ABCD$ 有一个交点且 $k$ 值均为正；当 $l$ 分别经过 $C$ 、 $B$ 时，是两个临界点，此时与矩形 $ABCD$ 有一个交点且 $k$ 值均为负.

②当 $l$ 在临界点之间时，与矩形 $ABCD$ 有两个交点；

③当 $l$ 在临界点两边时，与矩形 $ABCD$ 没有交点

**总结：**当一次函数的 $b$ 一定，是绕定点 $(0, b)$ 旋转的直线，通过旋转确定交点的个数，以此来确定临界值.

### 例题3

8. 已知两点 $A(3, 2)$ ， $B(-4, 1)$ ，则过点 $C(0, -1)$ 的直线 $l$ 与线段 $AB$ 有公共点求直线 $l$ 的斜率 $k$ 的取值范围( ).

- A.  $k > 1$                       B.  $k > 1$ 或 $k < -\frac{1}{2}$       C.  $k < -\frac{1}{2}$                       D.  $k > 1$ 或 $k < \frac{1}{2}$

【答案】B

【标注】【知识点】一次函数与动点问题

### 练习3

9. 已知函数 $y = (k-1)x + 2k - 1$ 与 $y = |x - 1|$ ，当满足 $0 \leq x \leq 3$ 时，两个函数的图象存在2个公共点，则 $k$ 满足的条件是( ).

A.  $0 \leq k \leq 3$

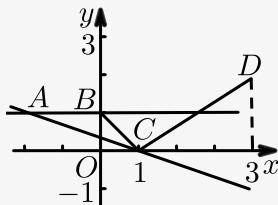
B.  $\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{6}{5}$

C.  $-\frac{1}{3} < k \leq 0$

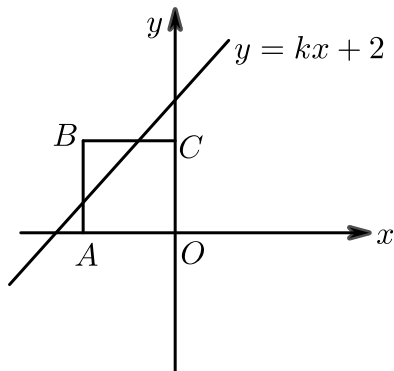
D.  $\frac{2}{3} < k \leq 1$

**【答案】** D**【解析】** 由已知, 当  $x = -2$  时,  $y = 2(k-1) + 2k - 1 = 2$  $\therefore$  函数  $y = (k-1)x + 2k - 1$  的图象过定点  $A(-2, 1)$ ,

如图:

 $y = |x - 1|$  的图象如图为折线  $BCD$ ,其中点  $B(0, 1)$ ,  $C(1, 0)$ ,  $D(3, 2)$ ,当函数  $y = (k-1)x + 2k - 1$  的图象过点  $C(1, 0)$  时,与折线  $BCD$  恰有一个交点, $k = \frac{2}{3}$  当过直线过点  $A$ ,  $B$  时, $AB \parallel x$  轴, 直线  $AB$  与折线  $BCD$  有两个交点,此时,  $k - 1 = 0$ , $\therefore k = 1$ ,故选 **D**.**【标注】** 【知识点】 两条直线的交点问题**|| 例题4**

10. 如图, 在平面直角坐标系中, 四边形  $OABC$  是边长为 1 的正方形, 顶点  $A$ 、 $C$  分别在  $x$  轴的负半轴、 $y$  轴的正半轴上. 若直线  $y = kx + 2$  与边  $AB$  有公共点, 则  $k$  的值可能为 ( ).



A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{3}{2}$

C.  $\frac{5}{2}$

D. 3

【答案】B

【解析】由题意可得：点 $A(-1, 0)$ ，点 $B(-1, 1)$ ，

把点 $A$ 代入解析式可得： $-k + 2 = 0$ ，解得： $k = 2$ ，

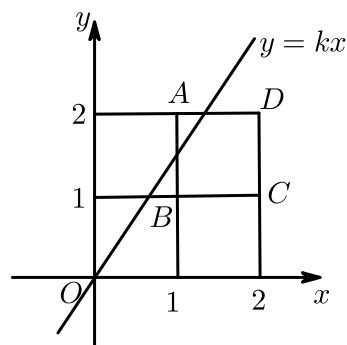
把点 $B$ 代入解析式可得： $-k + 2 = 1$ ，解得： $k = 1$ ，

所以 $k$ 的取值范围为： $1 \leq k \leq 2$ ，综上故选B。

【标注】【知识点】一次函数与特殊平行四边形

#### 练习4

11. 将 $2 \times 2$ 的正方形网格如图放置在平面直角坐标系中，每个小正方形的顶点称为格点，每个小正方形的边长都是1，正方形 $ABCD$ 的顶点都在格点上，若直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与正方形 $ABCD$ 有公共点，则 $k$ 的取值范围是（ ）。



A.  $k \leq 2$

B.  $k \geq \frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$

D.  $\frac{1}{2} < k < 2$

【答案】C

【解析】由题意得：点 $A$ 的坐标为 $(1, 2)$ ，点 $C$ 的坐标为 $(2, 1)$ ，

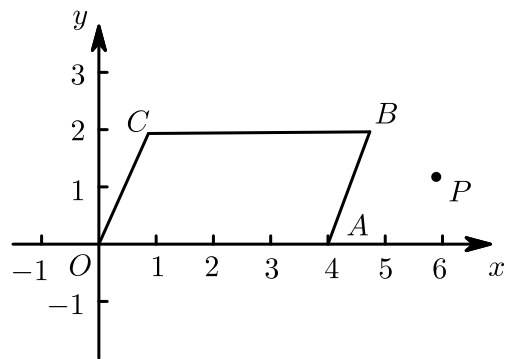
$\therefore$ 当正比例函数经过点 $A$ 时， $k = 2$ ，当经过点 $C$ 时， $k = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与正方形 $ABCD$ 有公共点， $k$ 的取值范围是 $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$ ，

故选C。

【标注】【知识点】正比例函数与几何综合

12. 在平面直角坐标系内有一平行四边形 $O(0, 0)$ ， $A(4, 0)$ ， $B(5, 2)$ ， $C(1, 2)$ ，有一次函数 $y = kx + b$ 的图象过点 $P(6, 1)$ 。



- (1) 若此一次函数图象经过平行四边形 $OA$ 边的中点, 求 $k$ 的值.
- (2) 若此一次函数图象与平行四边形 $OABC$ 始终有两个交点, 请求出 $k$ 的取值范围.

**【答案】** (1)  $k = \frac{1}{4}$ .

(2)  $-1 < k < \frac{1}{2}$  且  $k \neq 0$ .

**【解析】** (1) 设 $OA$ 的中点为 $M$ .

$$\because O(0,0), A(4,0),$$

$$\therefore OA = 4,$$

$$\therefore OM = 2,$$

$$\therefore M(2,0),$$

$\because$  图像过 $M$ 、 $P$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} 6k + b = 1 \\ 2k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } k = \frac{1}{4}.$$

(2) 当图像过 $B$ 、 $P$ 两点时, 代入表达式 $y = kx + b$ ,

$$\text{得到: } \begin{cases} 6k + b = 1 \\ 5k + b = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } k = -1.$$

当图像过 $A$ 、 $P$ 两点时, 代入表达式 $y = kx + b$ ,

$$\text{得到: } \begin{cases} 6k + b = 1 \\ 4k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } k = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } -1 < k < \frac{1}{2},$$

由于要满足一次函数的存在性, 所以 $-1 < k < \frac{1}{2}$  且  $k \neq 0$ .

**【标注】**【知识点】平行四边形性质综合应用